INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2,
Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală – 11 februarie 2012

Clasa a XII-a - Bareme

1). Fie grupul $(G,\cdot)$ şi $H=\{x^2 \mid x\in G\}$. Arătați că, dacă G este comutativ atunci H este subgrup al grupului G. Reciproca este adevărată?

Barem de corectare:
Fie $x\in H$ arbitrar, atunci există $x_0\in G$ astfel încât $x=x_0^2$
Avem $x^{-1}=\left(x_0^2\right)^{-1}=\left(x_0^{-1}\right)^2\in H$ *2p*
Fie $x,y\in H$ arbitrare, atunci există $x_0,y_0\in G$ astfel încât $x=x_0^2$ şi $y=y_0^2$ *1p*
Avem $xy=x_0^2y_0^2=x_0x_0y_0y_0=...=\left(x_0y_0\right)^2\in H$ *2p*
Reciproca nu este adevărată deoarece considerând grupul S_3 al permutărilor de 3 elemente şi $H=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\}$ se verifică că H este subgrup al lui S_3, dar S_3 nu este grup comutativ...*2p*

2). . Fie legea de compoziție $*:(-1,1)\mathrm{x}(-1,1)\to\Re$ definită prin $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}, x,y\in(-1,1)$.

a) Aratati ca $((-1,1),*)$ formeaza un grup abelian

b.) Aratati ca $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\dfrac{1-\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}}$ este un izomorfism de la $((-1,1),*)$ la $((0,+\infty),\cdot)$

b) Să se calculeze: $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{n}$, $n\geq 2$

Barem de corectare:

a) Se verifica faptul ca (-1,1) este parte stabila a lui $\Re$ si axiomele grupului...4p

b) Fie funcția $f:(-1;1)\to(0;\infty), f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

Se verifică faptul că f este bijectivă, $f^{-1}(x)=f(x)$ şi de asemenea, $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x,y\in(-1;1)$ 1p

Deci, f este un izomorfism de la $((-1;1),*)$ la $((0;\infty),\cdot)$.

Calculăm

$$f\left(\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{n}\right)=\prod_{k=2}^{n}f(\frac{1}{k})\Rightarrow\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{n}=f^{-1}\left(\prod_{k=2}^{n}f(\frac{1}{k})\right)\text{..............1p}$$

Dar, este uşor de arătat faptul că

$$\prod_{k=2}^{n}f(\frac{1}{k})=\frac{2}{n(n+1)}\Rightarrow\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{n}=\frac{n^2+n-2}{n^2+n+2}\text{ ....1p}$$

propunător prof. Gyorgy Francisc

4). Să se calculeze :

$$I(x)=\int\frac{\cos^3 x\cdot\sin x}{1+\cos^2 2x}dx \quad \text{şi} \quad J(x)=\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx,\quad x\in(0,\frac{3\pi}{4})$$

selectată de prof. Florian Tuduce

Barem de corectare :

a) $I(x)=\frac{1}{2}\int\frac{1+\cos 2x}{2(1+\cos^2 2x)}\cdot\sin 2xdx$ 2 p

Notăm t =cos2x

$I(t)=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}-\frac{1}{4}\int\frac{2t}{1+t^2}dt=-\frac{1}{2}arctgt-\frac{1}{4}\ln(1+t^2)+C$ 1 p

Deci : $I(x)=-\frac{1}{2}arctg(\cos 2x)-\frac{1}{4}\ln(1+\cos^2 2x)+C$ 1 p

b) $J(x)=\int\frac{dx}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}=-\frac{1}{2}tg(\frac{\pi}{4}-x)+C$ 3 p

4).Fie $I \subseteq \Re$ interval şi $f, g : I \to \Re$ două funcţii care au primitive pe I. Arătaţi că dacă există o submulţime finită $A \subset I$ astfel încât $f(x) = g(x), \forall x \in I \setminus A$, atunci $f = g$.

Propusă de prof. Matyas Mirel

<u>Barem de corectare:</u>

Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset I$ 2p
$h = f - g$ 1p
$B = h(A) = \{h(a_1), h(a_2), ..., h(a_n)\}$.....................1p
Dacă există $i \in \{1,2,....,n\}$ astfel încât $h(a_i) \neq 0$ atunci $h(I) = \{h(x) \mid x \in I \setminus A\} \cup B = \{0\} \cup B$ nu este interval, contradicţie (h admite primitive)..............................1p
Rezultă că $h(a_i) = 0, \forall i \in \{1,2,....,n\}$ deci concluzia..........................2p

NOTĂ:
Pentru orice altă soluţie corectă se acordă punctajul maxim aferent problemei.